

金融経済学 その①

現代ポートフォリオ理論

げんだい

りろん

-最適な投資戦略-

さいてき

とうし

せんりやく

金融大学 有馬秀次



金融理論

金融経済学

① 現代ポートフォリオ理論

② コーポレート・ファイナンス
MM理論 (モディリアーニ - ミラー)
資本資産価格モデル (CAPM)

③ オプション理論

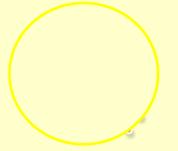
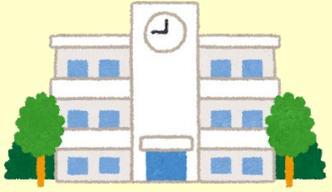
貨幣経済学

① 貨幣数量説

② 新古典派経済学

③ ケインズ経済学

④ マネタリズム



もくじ

① ポートフォリオの価値の捉え方

リターン、リスク、相関関係

② 投資家の行動

リスク回避的選択（行動）

③ グラフで視覚化

最適な資産選び



家計の行動
かけい こうどう



現代ポートフォリオ理論

げんだい りろん



(Modern Portfolio Theory, MPT)

モダン ポートフォリオ セオリ エム・ピー・ティ

1952年に**ハリー・マーコウィッツ**によって発表された論文

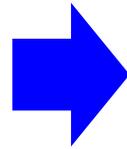
(Harry Max Markowitz, 1927年- 2023年)

米国の経済学者
べいこく けいざいがくしゃ

最小限のリスクでリターンを最大にするポートフォリオ
さいしょうげん さいだい

米国の経済学者ハリー・マーコウィッツが1952年に提唱した投資理論を、「現代ポートフォリオ理論 (MPT)」と呼びます。この理論は、投資家がリスクを管理しながら期待リターンを最大化する、最適なポートフォリオの見つけ方を提唱したものです。「最適」とは、分散投資を通じてリスクを低減し、最小限のリスクで最大のリターンを得る選択肢のことです。

ポートフォリオって何？



金融商品の組合わせ

きんゆう しょうひん くみあ

「ポートフォリオ」とは、英語で個々の書類をまとめて持ち運ぶための「書類かばん」のことを指します。金融理論では、投資家が保有する「金融商品の組み合わせ」のことを意味します。

①

ポートフォリオの価値の捉え方

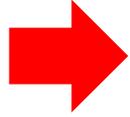
かち とら かた

リターン、リスク、相関関係

そうかんかんけい



リターン



期待収益率 きたいしゅうえきりつ

= (予想収益率 × 発生確率) の合計
よそう しゅうえきりつ はっせい かくりつ ごうけい



これを数式にすると

$$E(R) = \sum (R_i \times P_i)$$

イー・アール シグマ アールアイ ピアイ

総和を表す記号

加重平均
かじゅう へいきん

たとえば、

予想収益率A=2% 予想収益率B=5% 予想収益率C=10%

発生確率A=20% 発生確率B=30% 発生確率C=50% であるとき、

$$2\% \times 20\% + 5\% \times 30\% + 10\% \times 50\% = 6.9\%$$

$$0.02 \times 0.2 + 0.05 \times 0.3 + 0.1 \times 0.5 = 0.069$$

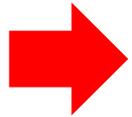
$$0.4\% + 1.5\% + 5\% = 6.9\%$$

ところで、
発生確率の合計は1になる!
 $0.2 + 0.3 + 0.5 = 1$
 $20\% + 30\% + 50\% = 100\%$

ちなみに、(発生確率 = 投資比率)
はっせいかくりつ とうし ひりつ

リターンは、期待収益率 ($E(R)$) として捉えます。これは、将来得られると予想される収益率の加重平均です。具体的にいうと、各実現可能な収益率に、その収益が発生する確率を掛けて合計したものです。つまり、発生確率で重み付けをした加重平均です。

リターン



期待収益率
きたいしゅうえきりつ

= (予想収益率 × 発生確率) の合計

よそう しゅうえきりつ はっせい かくりつ ごうけい

総和を表す記号



金融商品

これを数式にすると

$$E(R) = \sum (R_i \times P_i)$$

イー・アール シグマ アールアイ ピアイ

加重平均

かじゅう へいきん

たとえば、

予想収益率A=2% 予想収益率B=5% 予想収益率C=10%

発生確率A=20% 発生確率B=30% 発生確率C=50% であるとき、

$$2\% \times 20\% + 5\% \times 30\% + 10\% \times 50\% = 6.9\%$$

$$0.02 \times 0.2 + 0.05 \times 0.3 + 0.1 \times 0.5 = 0.069$$

$$0.4\% + 1.5\% + 5\% = 6.9\%$$

ところで、
発生確率の合計は1になる!

$$0.2 + 0.3 + 0.5 = 1$$

$$20\% + 30\% + 50\% = 100\%$$

ちなみに、(発生確率 = 投資比率)

はっせいかくりつ とうし ひりつ

たとえば、予想収益率がそれぞれA (2%)、B (5%)、C (10%) で、その発生確率がそれぞれA (20%)、B (30%)、C (50%) であるとき、期待収益率は、6.9%と計算されます。ちなみに、発生確率または投資比率を合計すると、必ず1になります。なお、発生確率は、投資比率に入れ替えられます。

リスク

データの散らばり具合

偏差 = 各データポイント - 平均

分散

ぶんさん

標準偏差

ひょうじゆんへんさ

リスクとは、価格が変動することで被る損失可能性のことです。これを価格の「散らばり具合」で捉えます。データの散らばり具合は、偏差を用いて計算します。偏差は、各データポイントが平均からどれくらい離れているかを数値化したものです。これには、分散と標準偏差という2つの指標があります。

分散

ぶんさん

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2$$

N : 母集団のデータの総数
エヌ ぼしゅうだん そうすう

Σ : 総和を表す記号
シグマ そうわ あらわ きごう

x_i : 各データポイントの値
エックス・アイ かく あたい

μ : 平均 (期待値)
ミュー へいきん きたいち

標準偏差

ひょうじゆんへんさ

$$\sigma = \sigma^2 \times \frac{1}{2} \quad \text{もしくは、} \sqrt{\sigma^2}$$

シグマ ルート

分散は、データの各値から平均を引いた偏差を二乗し、その結果の平均を取ったものです。偏差は、各データポイントから平均を差し引いたものです。標準偏差は、その分散の平方根を取ったものです。平方根をとるとは、分散を2分の1乗したものです。通常、 $\sqrt{\quad}$ (ルート) で表します。

母集団の分散 σ^2

ぼしゅうだん ぶんさん シグマ

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2$$

N: 母集団のデータの総数
エヌ ぼしゅうだん そうすう

Σ : 総和を表す記号
シグマ そうわ あらわ きごう

x_i : 各データポイントの値
エックス・アイ かく あたい

標本集団の分散 σ

ひょうほんしゅうだん ぶんさん シグマ

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

$x_i - \mu$: 偏差
エックスアイ マイナス ミュー へんさ

μ : 平均(期待値)
ミュー へいきん きたいち

σ : 標準偏差
シグマ ひょうじゆんへんさ

対象となるデータは、母集団と標本(サンプル)に分けられます。母集団は、対象となるすべてのデータの集まりを、標本は、母集団から抽出した一部のデータを指します。母集団分散は、データの総数(N)で割ります。標本分散は、標本のサイズ(n)で割るのではなく、(n-1)で割ります。標本から母集団の分散を推定する際のバイアスを減らすための工夫です。より良い推定値が得られます。

例えば、データセットが以下のような値であるとします。

データセット: 3, 7, 8, 5, 12 $N=5$ 、 $n=4$

1. 平均を計算: $\mu = (3 + 7 + 8 + 5 + 12) \div 5 = 35 \div 5 = 7$

2. 母分散を計算: $\sigma^2 = (1 \div 5) \times \{(3-7)^2 + (7-7)^2 + (8-7)^2 + (5-7)^2 + (12-7)^2\}$

各項を計算すると、 $= (1 \div 5) \times \{(-4)^2 + 0^2 + 1^2 + (-2)^2 + 5^2\}$

$$= (1 \div 5) \times (16 + 0 + 1 + 4 + 25) = 46 \div 5 = 9.2$$

標本分散を計算 (同じデータを使って、標本として扱う):

$$s^2 = (1 \div 4) \times \{(3-7)^2 + (7-7)^2 + (8-7)^2 + (5-7)^2 + (12-7)^2\}$$

$$= (1 \div 4) \times (16 + 0 + 1 + 4 + 25) = 46 \div 4 = 11.5$$

3. 標準偏差は、分散の平方根です。

母分散 (9.2) の標準偏差: $\sigma^{2 \wedge 0.5} = 3.03$

標本分散 (11.5) の標準偏差: $s^{2 \wedge 0.5} = 3.39$

母分散と標本分散を簡単なデータセットを使って計算してみましょう。まず、1. 平均を計算します。 $\mu=7$ となります。次に2. 母分散と標本分散を計算します。母分散 $\sigma^2=9.2$ 、標本分散 $s^2=11.5$ 、最後に3. 標準偏差を計算します。母集団の $\sigma=3.03$ 、標本集団の $s=3.39$ となります。



2変数X, Yの相関関係

へんすう エックス ワイ

そうかん かんけい

$$\text{共分散} (\rho^2) = \text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

きょうぶんさん ローのじょう XとYの共分散

\bar{x} はXの平均 \bar{y} はYの平均

$$\text{相関係数} (\rho) = \frac{\text{共分散}}{\text{標準偏差}} = \rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

そうかんけいすう ロー

-1 ~ 0 ~ +1

さて、共分散とは、2つの変数の変動がどのように関連しているかを示す指標です。正の値は両方の変数が同じ方向に動くことを、負の値は逆の方向に動くことを意味します。相関係数は、共分散を標準偏差で割ったものです。2つの変数の間の方向性の強さを-1から+1までの値で示します。+1は完全な正の相関、-1は完全な負の相関、0は相関がないことを示します。

ポートフォリオの期待リターンの計算

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n (w_i \times E(R_i))$$

ここで、 $E(R_p)$ はポートフォリオの期待リターン

イー・アール・ピー

きたい

w_i は資産*i*のポートフォリオにおけるウェイト(割合)

ウェイト・アイ しさん アイ

わりあい

$E(R_i)$ は資産*i*の期待リターン

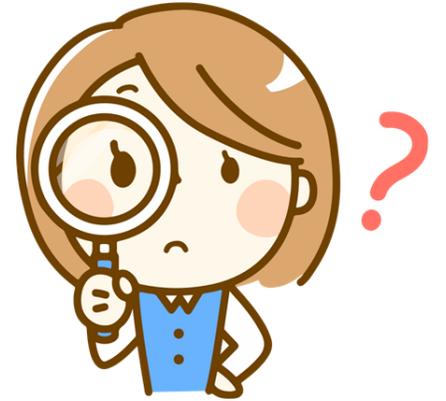
イー・アール・アイ しさん アイ きたい

n は資産の総数

エヌ しさん そうすう

ポートフォリオの期待リターン $E(R_p)$ は、各資産の期待リターンとその資産のポートフォリオ内の比率を使って加重平均したものです。

ポートフォリオのリスク



$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j}$$

ここで、 σ_p はポートフォリオの標準偏差
シグマ ピー ひょうじゅんへんさ

w_i は資産*i*のポートフォリオにおける比率（ウェイト）
ウエイト アイ しさん アイ ひりつ

σ_i は資産*i*の標準偏差
シグマ アイ しさん アイ ひょうじゅんへんさ

ρ_{ij} は資産*i*と資産*j*の相関係数
ロー アイジェイ しさん アイ しさん ジェイ そうかんけいすう

一方、ポートフォリオのリスク σ_p (標準偏差) は、各資産の分散と資産間の共分散を考慮して計算するため、計算過程が複雑になります。計算には、EXCEL (表計算ソフト) が役立ちます。

“リスクとリターンで考える！”

かんが

②

投資家の行動

とうしか

こうどう

リスク回避的選択（行動）

かいひてきせんたく

こうどう



リスクとリターンのトレードオフ

資産運用の世界

ローリスク → ローリターン

ハイリスク → ハイリターン

トレードオフの関係



マーコウィッツは、資産運用の世界でリスクとリターンのトレードオフに注目しました。トレードオフとは、高いリターンを追求するとリスクも増大し、逆にリスクを抑えるとリターンも低くなる傾向があることです。つまり、投資家はリスクとリターンの調和を図る行動をとると考えられます。

投資家の意思決定

とうしか いしけってい

- ① リスクを避ける傾向
さ けいこう
- ② 確実なリターンを好む傾向
かくじつ この けいこう

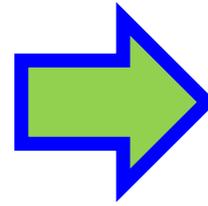
リスク回避的選択（行動）

かいひてき せんたく こうどう

現代ポートフォリオ理論では、投資家の心理として、不確実なギャンブルよりも確実な利益を好む傾向があると仮定しています。これをリスク回避的 (risk averse) 選択（行動）といいます。リスクを取ることによって得られる追加の利益よりも、リスクを避けて確実な利益を得ることを好むことを指します。

分散投資

ぶんさん とうし



リスク低減

ていげん

各資産クラスのリスクとリターンの特性は異なる
かくしさん とくせい こと

ローリスク

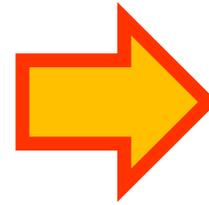


ポートフォリオ

ハイリスク



金融商品の組み合わせ



全体のリスク低減！

ぜんたい

ていげん



期待リターンの最大化

きたい

さいだいか

金融商品を上手に組み合わせることで、一定のリスクのもとで最大のリターンを得ることができます。異なる種類の資産に投資することで、各資産のリスクが相互に緩和し合い、全体のリスクが低減します。これを「分散投資」による「リスク低減効果」といいます。現代ポートフォリオ理論は、このリスク低減効果を利用してリターンの最大化を図る最適な資産配分の方法論です。

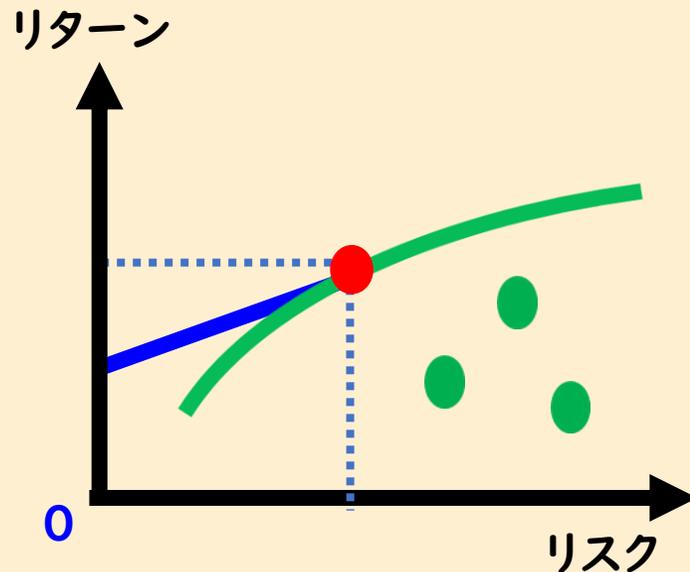
③

グラフで視覚化

しかくか

最適な資産選び

さいてき しさん えら



欧米の格言

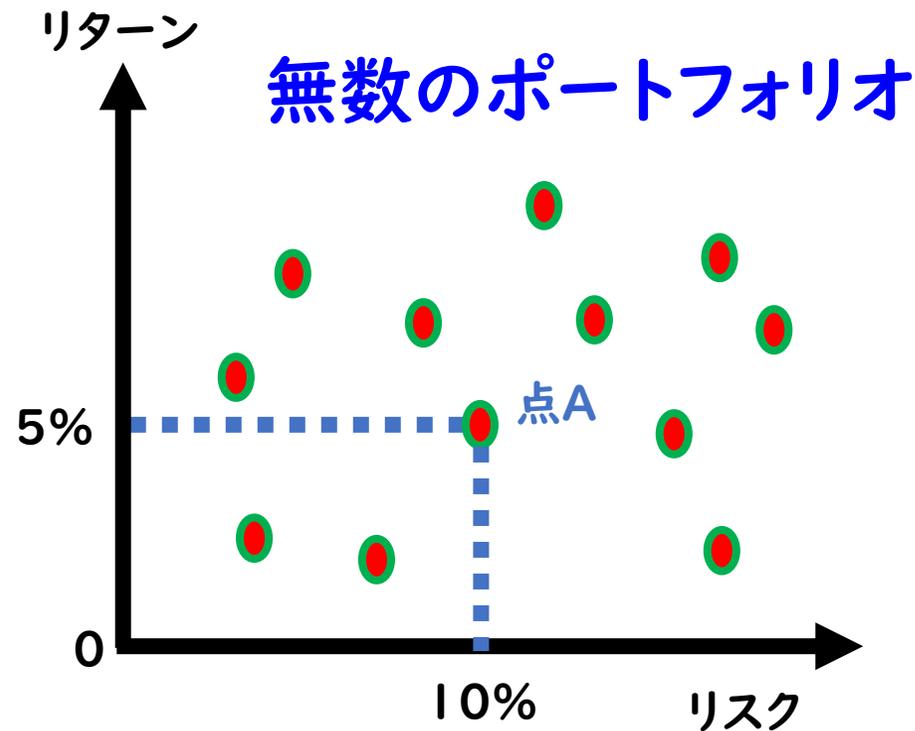
「Don't put all your eggs in one basket.」

(全ての卵を一つのかごに入れるな！)

この理論をグラフで説明してみましょう。

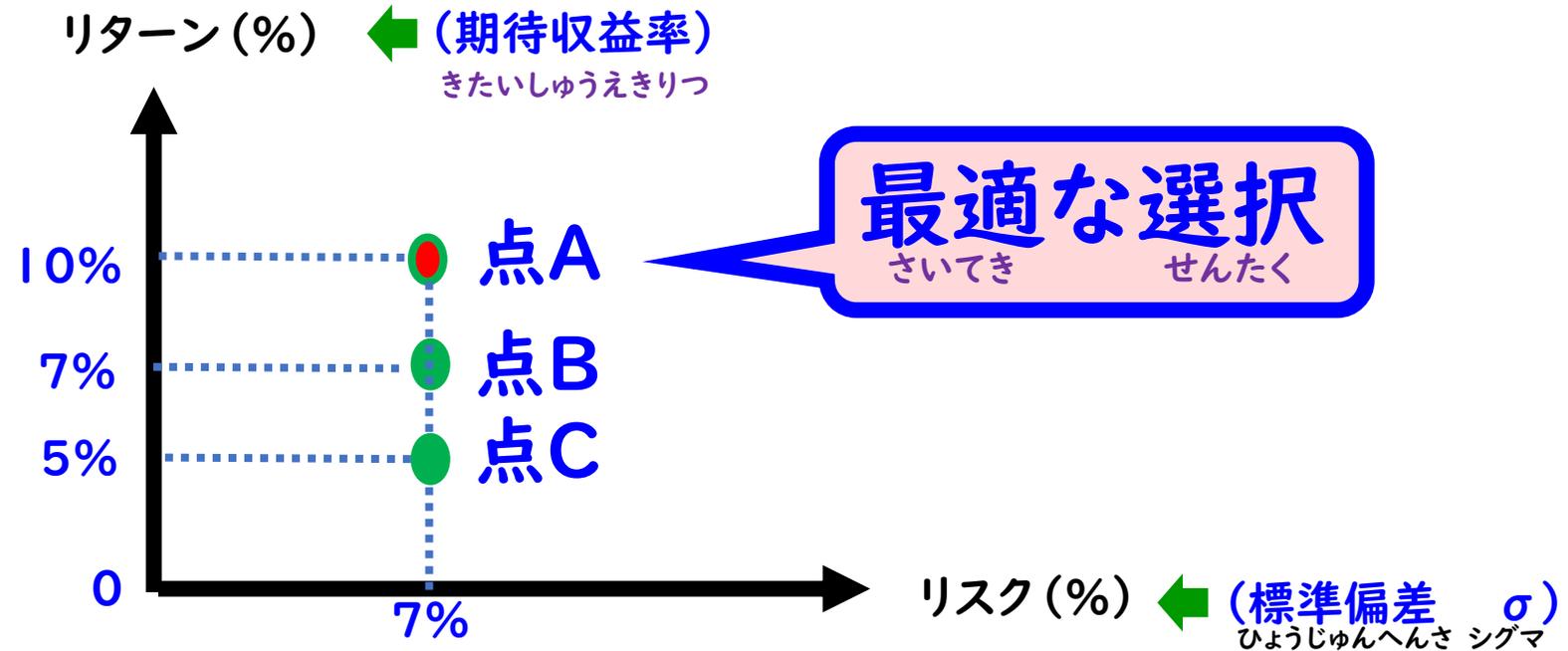
りろん

せつめい



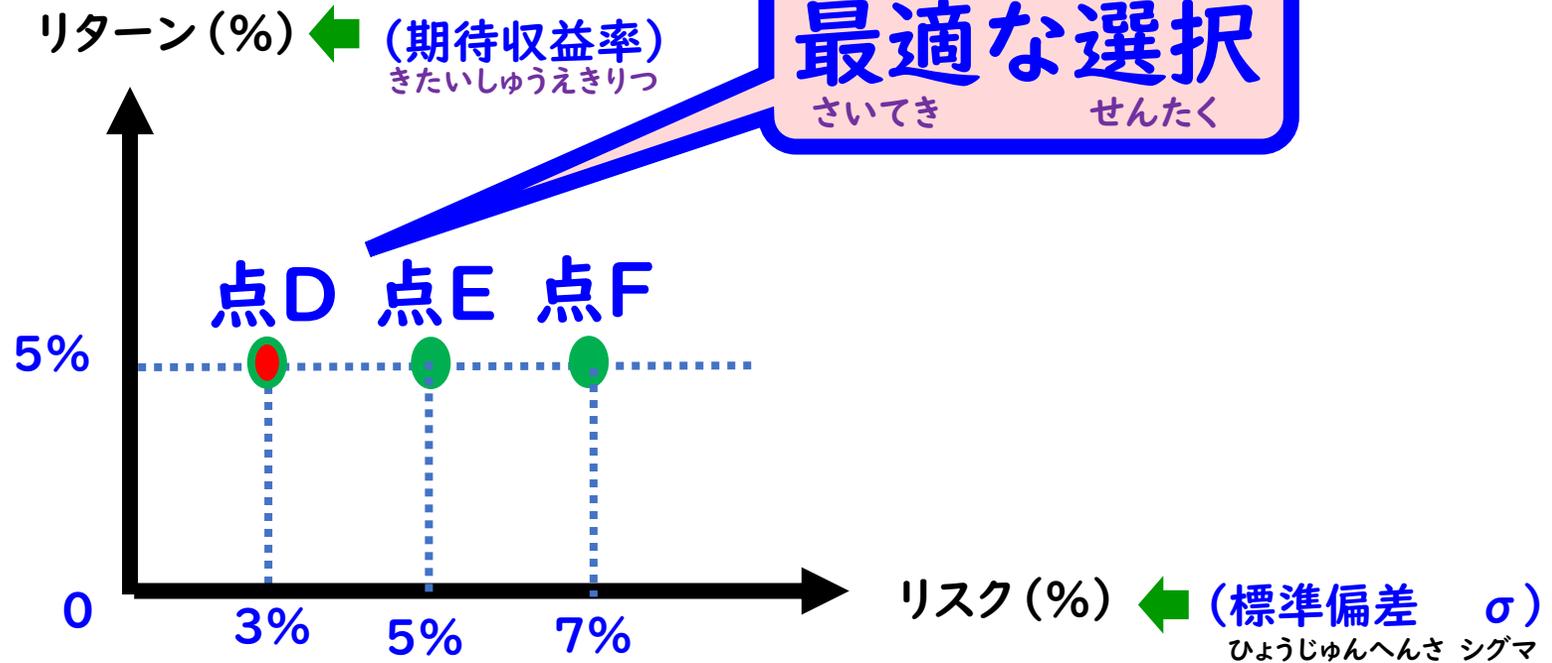
縦軸にリターン、横軸にリスクを取る平面上で、各点が異なるポートフォリオ（リスク資産の組み合わせ）を表します。たとえば、点Aは、リターン5%、リスク10%のポートフォリオを表します。

リスクが同じで異なるリターンのポートフォリオ



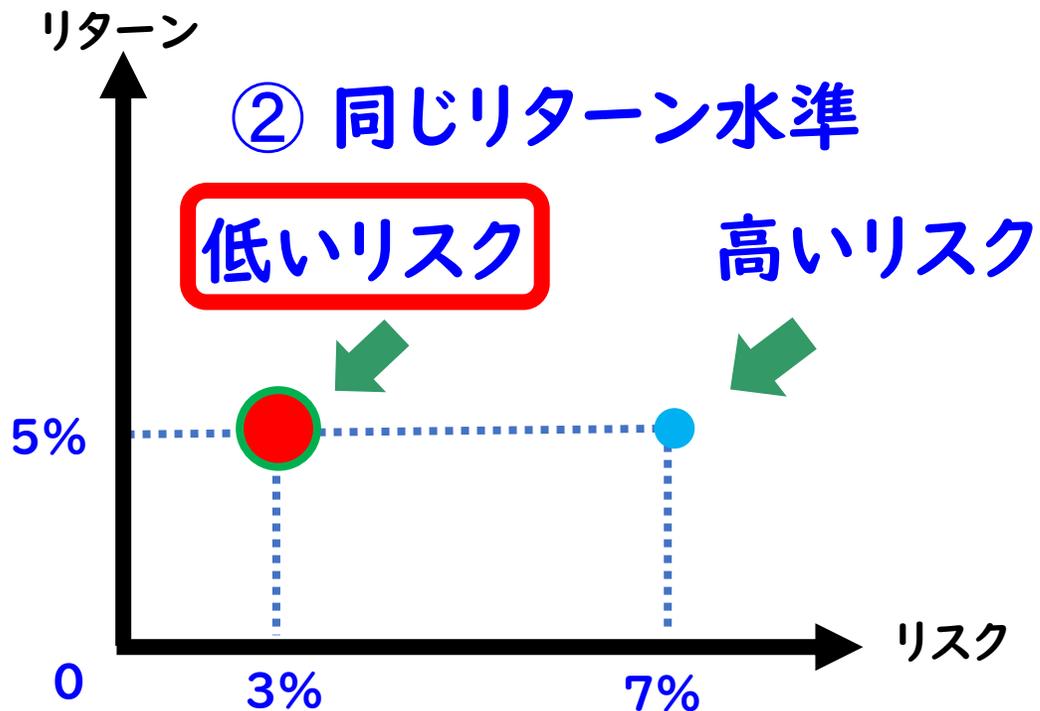
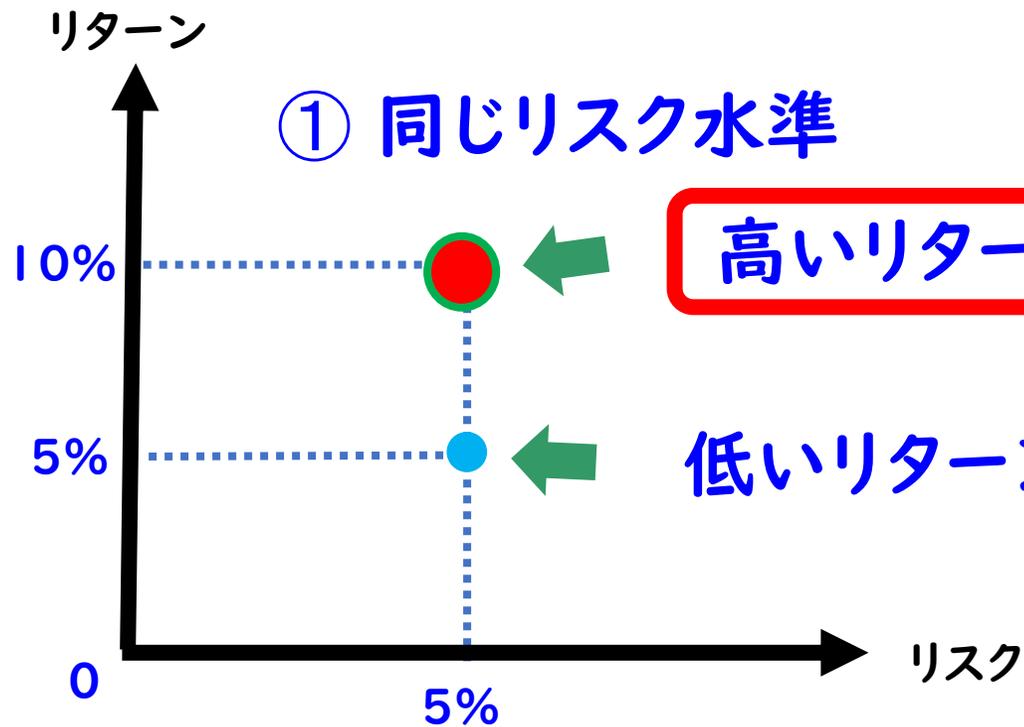
このグラフは、リスク (7%) が同じでリターンが異なるポートフォリオ (A、B、C) を表します。この例では、点Cのリターン (5%) が最も低く、点Aのリターン (10%) が最も高いことを示します。投資家がこれらのポートフォリオ (A、B、C) を購入する場合、最適な選択はリターンが最も高いポートフォリオAになります。

リターンが同じでリスクが異なるポートフォリオ



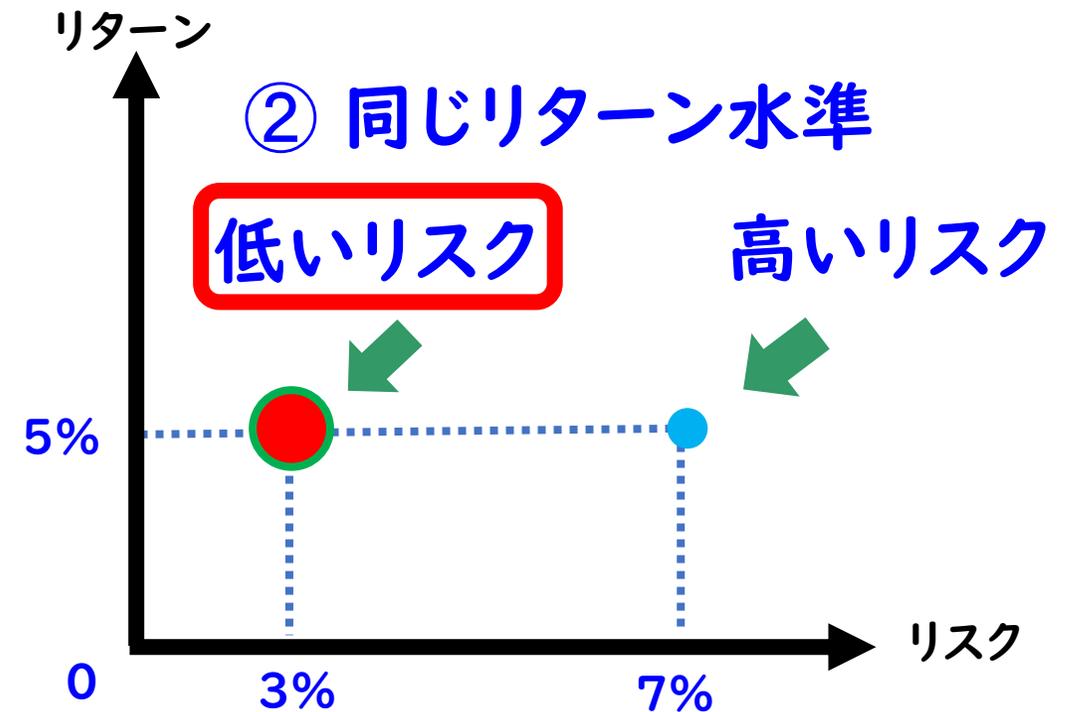
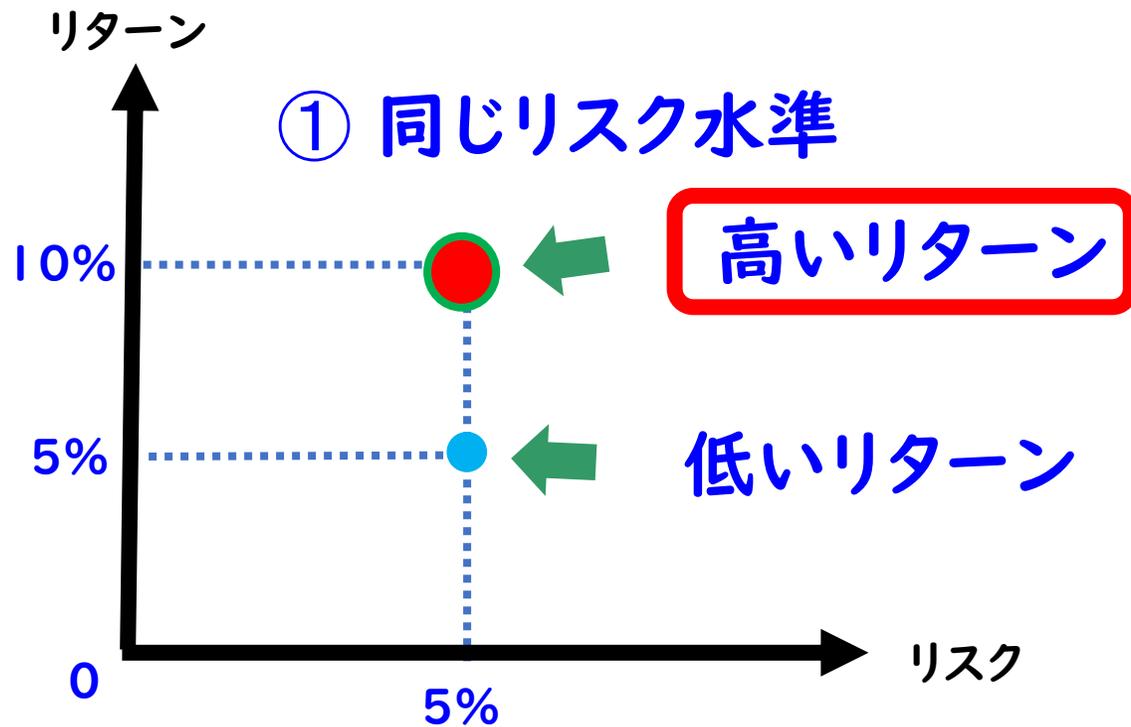
このグラフは、リターンが同じでリスクが異なるポートフォリオ (D、E、F) を表します。この例では、点Dのリスク (3%) が最も低く、点Fのリスク (7%) が最も高いことを示します。投資家がこれらのポートフォリオ (D、E、F) を購入する場合、最適な選択はリスクが最も低いポートフォリオDになります。

リスクとリターンで選択



最適な行動とは、①与えられたリスク (5%) が同じなら、リターンが最大のポートフォリオを選択します。たとえば、リスクが (5%) であれば、リターンが最も高い (10%) を選択します。もしくは、②与えられたリターン (5%) が同じなら、リスクが最小のポートフォリオを選択します。たとえば、リターンが (5%) であれば、リスクが最も低い (3%) を選択します。

リスクとリターンで選択



このようなポートフォリオを「最適なポートフォリオ」といいます。つまり、①与えられたリスクレベル(5%)で最大の期待リターン(10%)を提供する、または、②与えられた期待リターン(5%)を最小のリスク(3%)で提供するポートフォリオのことです。

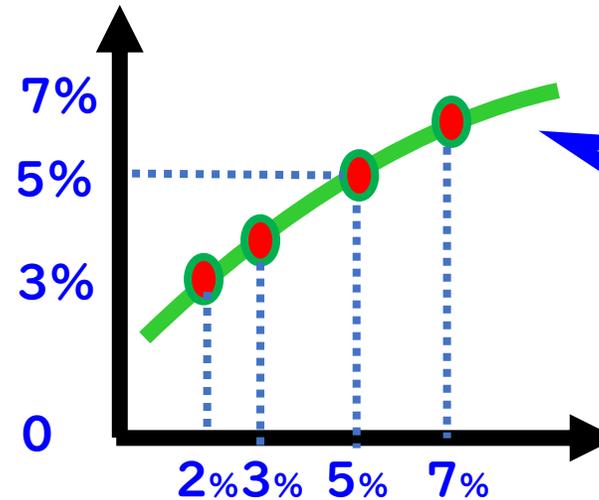
効率的フロンティア

こうりつてき

このグラフでは、各点が単体の金融商品ではなく、**ポートフォリオ**を示しています。

(期待収益率) →
きたいしゅうえきりつ

リターン (%)



リスク資産のみの
ポートフォリオ

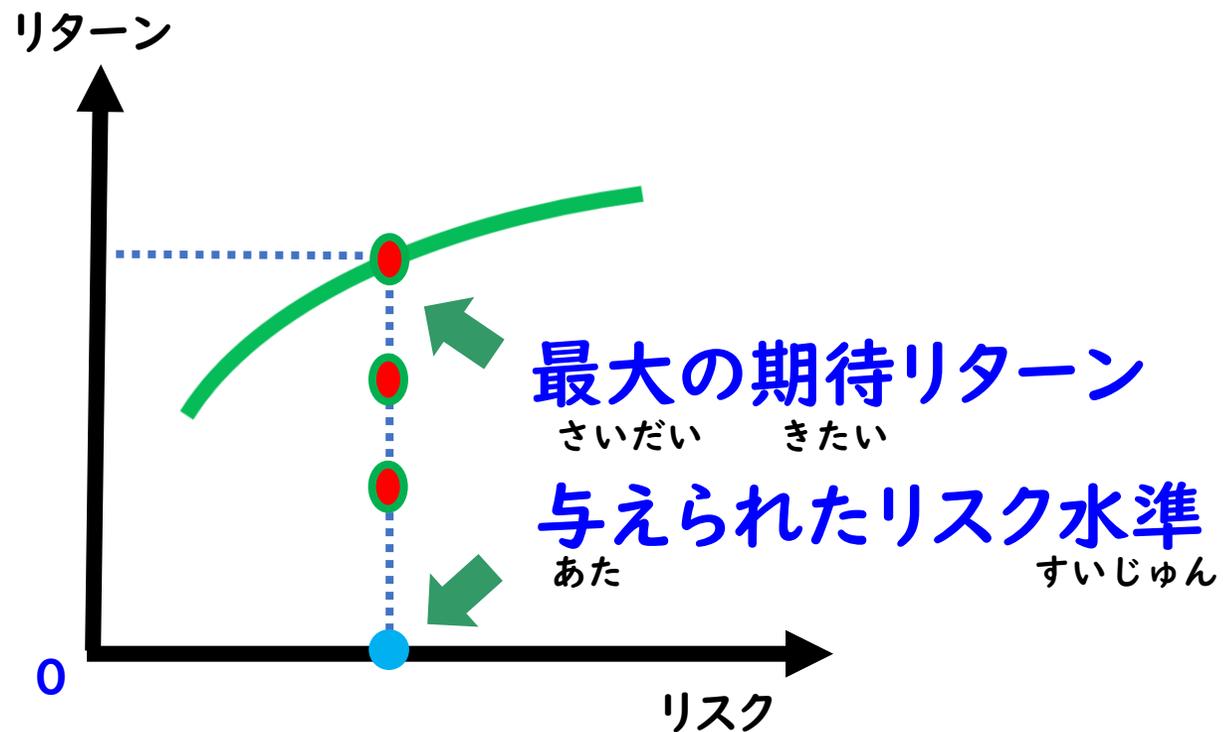
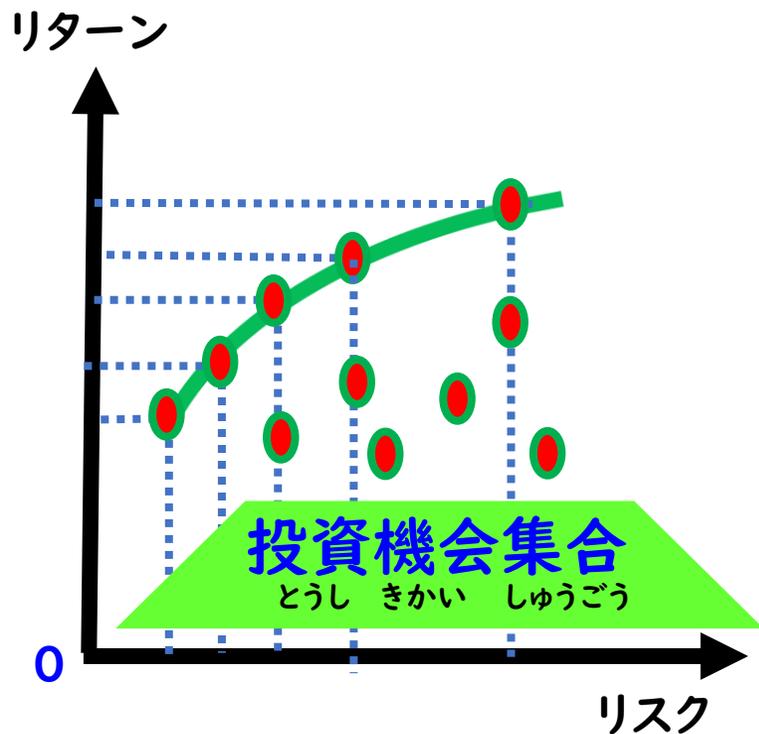
リスク (%) ← (標準偏差 σ)
ひょうじゆんへんさ シグマ

さて、各リスク水準で最適なポートフォリオ (赤色の点) を結ぶと、左上方へ凸の曲線が描かれます。これを『効率的フロンティア』 (緑色の曲線) と呼びます。これは、リスク資産のみからなるポートフォリオの最適な組み合わせを示します。

リスク回避的選択

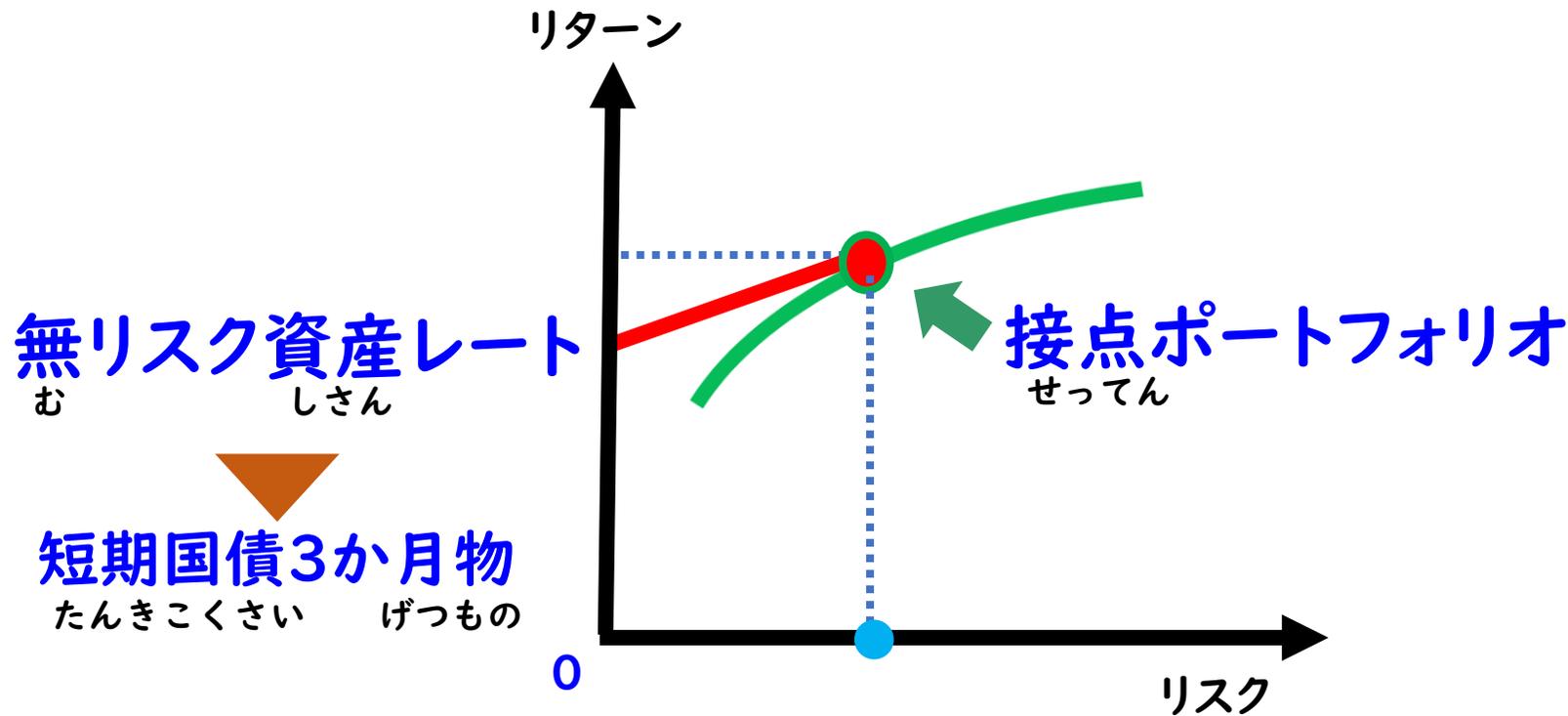
かいひてき

せんたく



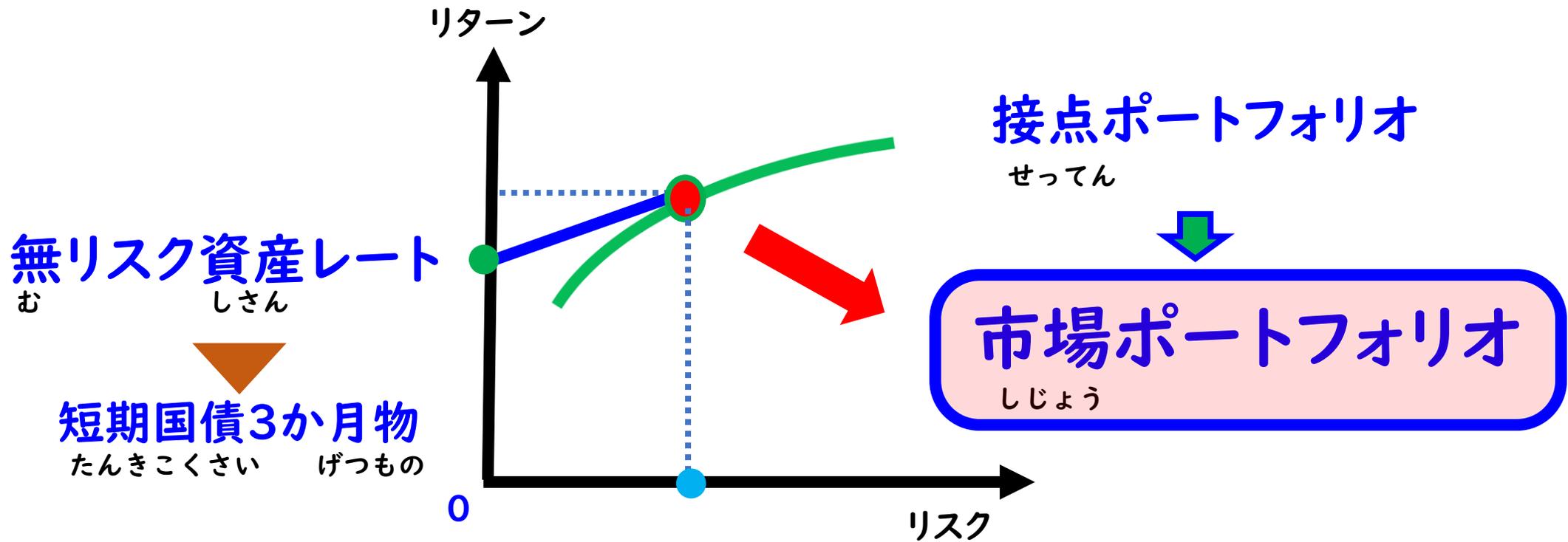
リスク回避的投資家は、自身のリスク許容度に応じて、効率的フロンティア上のポートフォリオを選択します。

接点ポートフォリオ



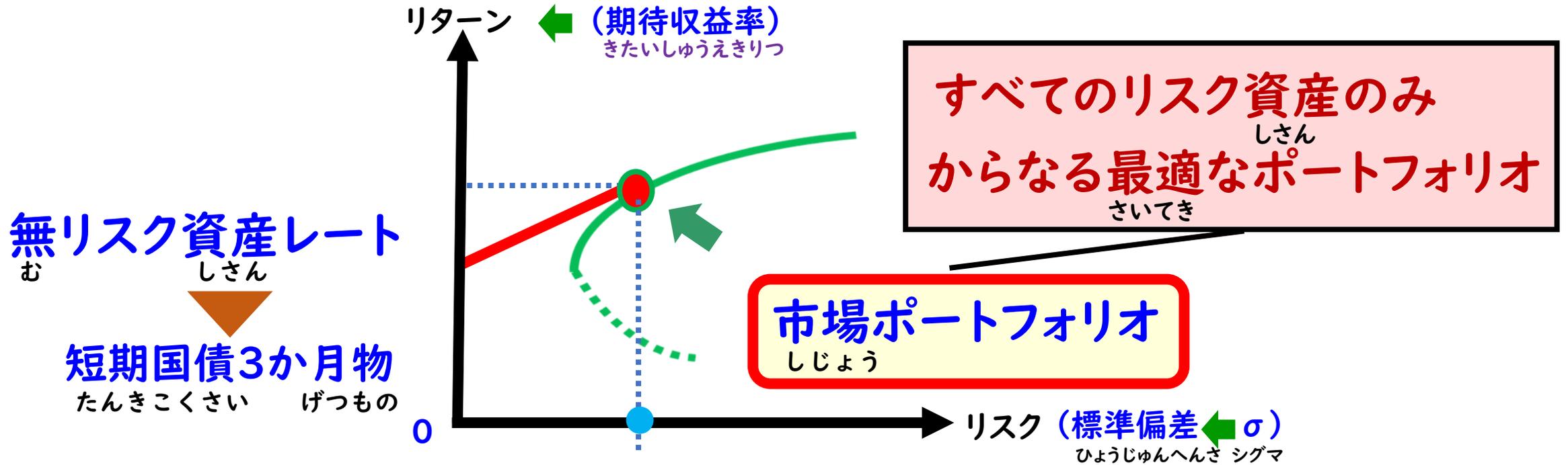
ここで、無リスク資産レート（横軸のリスクが0の点）と効率的フロンティアを結ぶ接線を考えます。効率的フロンティアとの接点にあるポートフォリオを「接点ポートフォリオ」といいます。

市場ポートフォリオ



この接点ポートフォリオのことを「市場ポートフォリオ」といいます。市場ポートフォリオは、市場全体のリスクとリターンを反映するポートフォリオのことです。

市場ポートフォリオ



「市場ポートフォリオ」とは、すべてのリスク資産を含む最適なポートフォリオのことです。これは、投資家が持つべきリスク資産の集合を示しています。無リスク資産とは、リスクがゼロの債券のことです。たとえば、短期の米国国債がこれに該当します。

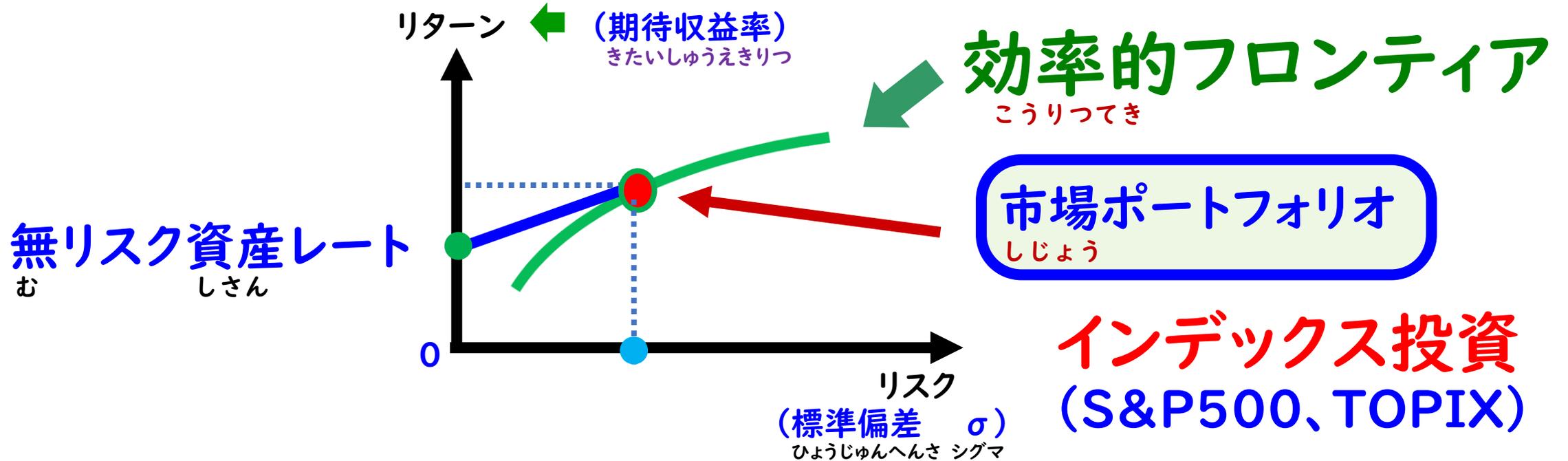
効率的フロンティア

こうりつてき



市場ポートフォリオ

しじょう



効率的フロンティア

こうりつてき

市場ポートフォリオ

しじょう

インデックス投資 (S&P500、TOPIX)

現代ポートフォリオ理論は、最適な投資として、市場ポートフォリオを保有することを奨めています。具体的には、インデックス投資を行うことです。インデックスとは、市場の値動きに連動する指数のことです。米国のS&P500や日本のTOPIXなどがこれに該当します。

効率的市場仮説

こうりつてき しじょう かせつ

Efficient Market Hypothesis

エフィシエント マーケット ハイポセシス



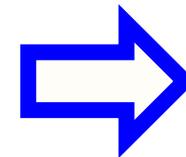
情報

じょうほう



価格

かかく



市場平均

しじょう へいきん

ちなみに、「効率的市場仮説 (EMH)」とは、金融市場は非常に「効率的」で、すべての利用可能な公開情報は即座に価格に反映されるという主張です。つまり、市場価格は市場平均に収れんするため、個々の投資家が市場全体を上回るリターンを得ることは難しいという仮説です。この仮説は、最適な投資戦略として市場ポートフォリオを保有することを推奨する現代ポートフォリオ理論を支持する学説と考えられます。

まとめ



1. 「現代ポートフォリオ理論」は、**ハリー・マーコウィッツ**が1952年に提唱した投資理論である。
2. ポートフォリオの価値は、①**リターン**、②**リスク**、③**相関関係**という3つの要素を統合して評価する。
①リターンは、投資から得られる収益（利益）のこと ②リスクは、資産価格の変動性のこと
③相関関係は、異なる資産間の価格変動の相互関係のことである。
3. リターンとリスクには、**トレードオフ**の関係がある。多くの投資家は、**リスク回避的行動**をとる。
4. 「**分散投資**」による「**リスク低減効果**」を利用すれば、最適なポートフォリオを構築できる。
5. 最適な投資の組み合わせ（**効率的フロンティア**）をグラフで表すと、左上方に膨らんだ曲線になる。
6. 最適なポートフォリオとは、**市場ポートフォリオ**のことである。
実際には**インデックス投資**がその近似として推奨される。
7. 「現代ポートフォリオ理論」は、**効率的市場仮説**（市場が効率的に動いているという考え）と概ね合致する。公開情報が即座に価格に反映されるのであれば、投資家が市場ポートフォリオのリターンを超えることは難しくなる。

ナレーション 有馬秀次

音楽効果 OtoLogic



では、また次回



制作 金融大学

